Automorfismos de polinômios

I.P.Shestakov (IME-USP)

Os polinm̂ios são os objetos mais antigos estudados na álgebra. Mesmo assim, a estrutura do anel de polinm̂ios, de seus subanéis, derivações e automorfismos têm vários problemas abertos.

Nesta palestra, nós vamos falar sobre os automorfismos de polinômios.

Seja $A_n = F[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo F de números (racionais, reais ou complexos) nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Um automorfismo de A_n é uma aplicação bijetora $\varphi : A_n \to A_n$ tal que para quaisquer polinômios $f, g \in A_n$ e para qualquer $\alpha \in F$ tem-se

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g),\ \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g),\ \varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f).$$

É claro que os elementos $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ geram de novo o anel A_n, isto é, $A_n = F[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)]$. Portanto, o problema de descrição de todos os automorfismos de A_n é equivalente ao problema de descriçãao de todas n-uplas de polinômios $f_1, \ldots, f_n$ que geram A_n. Este problema é muito importante e tem várias aplicações em álgebra e geometria.

Um exemplo evidente de automorfismo é uma aplicação do seguinte tipo: $\phi : (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, \lambda x_i + f, \ldots, x_n)$, onde $0 \neq \lambda \in F$ e o polinômio f não contem x_i. Os automorfismos desse tipo chamam-se *elementares*.

No ano de 1942, H.W.E.Jung provou que, no caso $n = 2$, qualquer automorfismo de $A_2 = F[x, y]$ pode ser obtido como uma composição de automorfismos elementares. Mas o problema semelhante para $n \geq 3$ ficou em aberto.

Em 1972, M.Nagata construiu um automorfismo σ do anel A_3 para o qual ele conjeturou a impossibilidade de ser composto por automorfismos elementares.

Em 2004, I.Shestakov e U.Umirbaev confirmaram a conjetura de Nagata.

Nós vamos apresentar algumas idéias e métodos da demostração desta conjetura, além de falar sobre outros problemas e resultados relacionados com a estrutura de automorfismos de polinômios, incluindo a famosa *Conjetura de Jacobian.*